III. FELADAT (30p)

1. Adottak az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ és $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arctg} x$ függvények.

5p **a)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)g(x)\right)$ határértéket!

5p **b)** Határozd meg az f függvény helyi szélsőérték-pontjait!

5p **c)** Igazold, hogy $f(x)<g(x)$, bármely $x\in(0,\infty)$ esetén!

2. Adott az $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x-m, x\in[0,1] \\ x\ln x, x\in(1,2]\end{cases}$ függvény, ahol $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Igazold. hogy bármely $m\in\mathbb{R}$ esetén a függvény integrálható!

5p **b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{\int_1^x t\ln t\,dt}{x-1}$ határértéket!

5p **c)** Ha $m=1$, igazold, hogy bármely $t\in(0,2)$ esetén léteznek olyan $a,b\in[0,2]$, $a\neq b$ értékek, amelyekre $\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(t)$.