

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (-\infty, -2) \cup (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az f függvény konkáv a $(-\infty, -2)$ intervallumon.

5p b) Számítsd ki az $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) - \ln \frac{n(n+1)}{2}$ sorozat határértékét.

5p c) Igazold, hogy létezik egy $c \in (1, 2)$ érték, amelyre $(c-1)f'(c) + f(c) = f(2)$.

2. Adott az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ függvény.

5p a) Számítsd ki az $\int_0^1 xf(x)dx$ értékét.

5p b) Igazold, hogy: $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 1$.

5p c) Számítsd ki az $\int_0^1 \frac{f(x)f''(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} dx$ értékét.