III. FELADAT (30p)

1. Adott az $M = \left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ kétszer deriválható és } f(0)=0,\ f'(0)=1 \right\}$ függvényhalmaz.

5p **a)** Igazold, hogy az $u : [-1,1] \to \mathbb{R},\ u(x) = e^x \sin x$ függvény benne van az M halmazban.

5p **b)** Ha $f \in M$ és $f(x) \neq 0,\ \forall x \in [-1,1] \setminus \{0\}$, igazold, hogy $\lim\limits_{x \to 0} (1 + f(x))^{\frac{1}{x}} = e$.

5p **c)** Ha $f \in M$ és $n \in \mathbb{N}^*$, igazold, hogy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f^n(x) - x^n}{x^{n+1}} = \dfrac{nf''(0)}{2}$.

2. Adottak az $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ és $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x f(t)dt$ függvények.

5p **a)** Igazold, hogy: $g(x) = \ln(1+x)$.

5p **b)** Számítsd ki az $\int_0^1 f^2(x) g(x) dx$ értékét.

5p **c)** Bizonyítsd be, hogy $f\left(\dfrac{1}{n}\right) + f\left(\dfrac{2}{n}\right) + f\left(\dfrac{3}{n}\right) + \ldots f\left(\dfrac{n}{n}\right) \leq n \ln 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén.