III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ függvény.

5p **a)** Tanulmányozd az f függvény deriválhatóságát az origóban.

5p **b)** Igazold, hogy bármely $k\in(0,\infty)$ esetén létezik olyan $c\in(k,k+1)$, amelyre $f(k+1)-f(k)=\frac{1}{\sqrt[3]{c}}$.

5p **c)** Igazold, hogy az $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-f(n)$ sorozat szigorúan csökkenő.

2. Adott az $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(1+x)$ függvény.

5p **a)** Számítsd ki az $\int_0^1 f(x)dx$ értékét.

5p **b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^5}$ határértéket, ahol $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $x\in[0,+\infty)$.

5p **c)** Felhasználva esetleg az f függvényt, igazold, hogy: $\int\limits_0^1 \ln(1+x)\leq\frac{5}{12}$.