

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$  függvény.

5p a) Határozd meg a függvény grafikus képének aszimptotáját a  $+\infty$ -ben!

5p b) Számítsd ki:  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

5p c) Igazold, hogy az  $f$  függvény konkáv a  $(-\infty, -1)$  intervallumon!

2. Tetszőleges  $n \in \mathbb{N}^*$  esetén értelmezzük az  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = |\sin nx|$  függvényt

és az  $I_n = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{f_n(x)}{x} dx$  számot.

5p a) Számítsd ki az  $\int_0^{\pi} f_2(x) dx$  értékét!

5p b) Igazold, hogy:  $I_n \leq \ln 2$ .

5p c) Mutasd ki, hogy:  $I_n \geq \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$ .