

Ministerul Educatiei, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^\alpha - \alpha x$ függvény, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$.

5p a) Tanulmányozd az f függvény monotonitását!

5p b) Igazold, hogy $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$, $\forall x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$, $\forall \alpha \in (1, \infty)$ esetén!

5p c) Igazold, hogy $2f(x+y) \leq f(2x) + f(2y)$, $\forall x, y \in [0, \infty)$ esetén!

2. Adott az $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x}$ függvény.

5p a) Számítsd ki az $\int_0^1 f(x) dx$ értékét!

5p b) Számítsd ki $\int_1^3 f^2(x)[x] dx$ értékét, ahol $[x]$ az x valós szám egészrészét jelöli!

5p c) Igazold, hogy $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) - \int_0^n f(x) dx$ sorozat konvergens!