

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  függvény.
- 5p a) Tanulmányozd az  $f$  függvény monotonitását!
- 5p b) Igazold, hogy  $(x^2 + 1)f''(x) + xf'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ , bármely  $x \in \mathbb{R}$  esetén!
- 5p c) Igazold, hogy az  $f$  függvény grafikus képe van aszimptotája a  $-\infty$ -ben!
2. Adott az  $(I_n)_{n \geq 1}$  sorozat,  $I_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{x^n + 1} dx$ .
- 5p a) Számítsd ki az  $I_1$  értékét!
- 5p b) Igazold, hogy  $I_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  esetén!
- 5p c) Számítsd ki a  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  határértéket!