

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sqrt{\left| \frac{x+1}{x-1} \right|}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az $x=1$ egyenletű egyenes az f függvény grafikus képének függőleges aszimptotája!

5p b) Igazold, hogy a függvény grafikus képének van aszimptotája a $+\infty$ -ben!

5p c) Tanulmányozd az f függvény deriválhatóságát!

2. Adott az $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{\cos^n x + \sin^n x}$ függvény, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Számítsd ki az $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{f_1(x)} dx$ értékét!

5p b) Ha F az f_4 egy primitív függvénye, igazold, hogy $F''(x) = (f_4(x))^2 \sin 4x$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén!

5p c) Igazold, hogy: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x f_1(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x f_1(x) dx = \frac{\pi-1}{4}$.