

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az f függvény szigorúan növekvő!

5p b) Tanulmányozd az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat konvergenciáját, ha $x_1 = 1$ és $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

5p c) Igazold, hogy $f(x+1) - f(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén!

2. Adottak az $f, g : (0, 3) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{3-x}$ és $g(x) = \frac{\ln(3-x)}{x}$, $\forall x \in (0, 3)$ függvények.

5p a) Számítsd ki $\int_1^e (3-x)f(x)dx$ értékét!

5p b) Igazold, hogy: $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 g(x)dx$.

5p c) Igazold, hogy: $\lim_{t \searrow 0} \int_t^1 g(x)dx = +\infty$.