

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Minden $a > 0$ esetén, tekintsük az $f_a : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_a(x) = (x + a) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ függvényt.

5p a) Számítsd ki $f'_a(x)$ -et, ha $x > 0$.

5p b) Határozd meg az a értékét úgy, hogy az f_a függvény konvex legyen!

5p c) Igazold, hogy az f_a függvény grafikus képének van aszimptotája a $+\infty$ -ben!

2. Legyen $(I_n)_{n \geq 1}$ sorozat, ahol $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

5p a) Számítsd ki az I_2 értékét!

5p b) Igazold, hogy $nI_n = (n-1)I_{n-2}, \forall n \geq 3$ esetén!

5p c) Bizonyítsd be, hogy az $(I_n)_{n \geq 1}$ sorozat konvergens!