

**Ministerul Educatiei, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p)**

1. Adottak az  $f_n : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^{n+1} - (n+2)x + n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  függvények.

5p a) Igazold, hogy az  $f_n$  függvények grafikus képének nincs aszimptotája  $+\infty$ -ben!

5p b) Igazold, hogy  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  esetén, az  $f_n$  függvénynek egyetlen egy  $x_n$  szélsőérték-pontja van!

5p c) Számítsd ki a  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{n^2}$  határértéket, ahol az  $x_n$  a b) pontban értelmezett szélsőérték-pont!

2. Legyen az  $(I_n)_{n \geq 1}$  sorozat,  $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$ .

5p a) Számítsd ki  $I_1$  értékét!

5p b) Igazold, hogy  $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$ ,  $\forall n \geq 1$  esetén!

5p c) Számítsd ki a  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  határértéket!