

Ministerul Educatiei, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Adottak az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$ és $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x+1) - f(x) - f\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$ függvények.

5p a) Igazold, hogy az f függvény grafikus képének van aszimptotája $+\infty$ -ben!

5p b) Igazold, hogy $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{1+1+1^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{1+2+2^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{1+3+3^2} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{1+n+n^2} \right)$

határértéket!

2. Legyen $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 e^{-x} x^n dx$, $n \in \mathbb{N}^*$ sorozat.

5p a) Számítsd ki I_1 értékét!

5p b) Igazold, hogy $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$ bármely $n \geq 2$ esetén!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ határértéket!