

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arctg x$  függvény.

5p a) Igazold, hogy az  $f$  függvény konkáv a  $[0, \infty)$  intervallumon!

5p b) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (f(x+1) - f(x))$  határértéket!

5p c) Oldd meg az  $f(x) < x - \frac{x^3}{3}, x \in \mathbb{R}$  egyenlőtlenséget!

2. Adott az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$  függvény.

5p a) Számítsd ki  $\int_0^1 x(1+x^2)f(x)dx$  értékét!

5p b) Igazold, hogy az  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x t^4 f(t)dt$  függvény szigorúan növekvő!

5p c) Igazold, hogy bármely  $a \in \mathbb{R}$  esetén teljesül az  $\int_1^a f(x)dx < \frac{1}{4}$  összefüggés!