

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ esetén értelmezzük az $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - nx - 1$ függvényt.

5p a) Igazold, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ esetén az f_n függvény konvex!

5p b) Igazold, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ esetén az $f_n(x) = 0$ egyenletnek egyetlen megoldása van!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ határértéket, ahol x_n az $f_n(x) = 0$ egyenlet egyetlen megoldása!

2. Adottak az $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, $g(x) = \int_{-x}^x f(t) \cos t dt$ függvények.

5p a) Számítsd ki az $\int_0^1 f(x) dx$ értékét!

5p b) Tanulmányozd a g függvény monotonitását a $[0, \pi]$ intervallumon!

5p c) Számítsd ki $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ értékét!