

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p) V: 001**

1. Tekintsük az  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$  függvényt.

5p a) Számítsd ki az  $f$  függvény deriváltját.

5p b) Határozd meg az  $f$  függvény monotonitási intervallumait.

5p c) Igazold, hogy  $f(x) \leq -4$  bármely  $x < -1$  esetén.

2. Tekintsük a következő függvényeket:  $f_n : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = e^{-x} x^n$  bármely  $n \in \mathbb{N}^*$  és

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{bármely } n \in \mathbb{N}^* \text{ esetén.}$$

5p a) Számítsd ki az  $\int_0^1 e^x f_1(x) dx$  értékét.

5p b) Igazold, hogy a  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f_1(t) dt = 1$ .

5p c) Igazold, hogy  $I_n = -\frac{1}{e} + nI_{n-1}$ , bármely  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  esetén.