

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) V: 006

1. Tekintsük az $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}$ függvényt.

5p a) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ határértéket.

5p b) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$, bármely $x \geq 0$.

5p c) Bizonyítsd be, hogy $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 2$ bármely $x \in [0, +\infty)$ esetén.

2. Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén tekintsük az $I_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $I_0(x) = 1$ és $I_{n+1}(x) = \int_0^x I_n(t) dt$ függvényeket.

5p a) Számítsd ki: $I_1(x)$.

5p b) Számítsd ki a I_2 függvény grafikonja, az Ox tengely, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét.

5p c) Bizonyítsd be, hogy $I_0(x) + I_1(x) + I_2(x) \leq e^x$, bármely $x \in [0, \infty)$ esetén.