

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p) V: 008**

1. Tekintsük az  $f : (0, +\infty) \setminus \{e\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$  függvényt.

5p a) Számítsd ki  $f(1) + f\left(\frac{1}{e}\right)$ .

5p b) Ellenőrizd, hogy  $f'(x) = \frac{2}{x(1 - \ln x)^2}$ ,  $\forall x \in (0, \infty) \setminus \{e\}$ .

5p c) Határozd meg az  $f$  függvény grafikus képehez a  $+\infty$ -be húzott vízszintes aszimptota egyenletét.

2. Tekintsük az  $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$  és  $g(x) = \frac{1}{x}$  függvényeket.

5p a) Számítsd ki az  $f + g$  függvény primitív függvényeit.

5p b) Igazold, hogy  $\int_1^2 (f^2(x) + g^2(x)) dx = \frac{e^4 - e^2 + 1}{2}$ .

5p c) Esetleg felhasználva, hogy  $2ab \leq a^2 + b^2$  bármely  $a, b \in \mathbb{R}$ , bizonyítsd be, hogy

$$\int_1^2 e^x \cdot \frac{1}{x} dx \leq \frac{e^4 - e^2 + 1}{4}.$$