

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) V: 009

1. Tekintsük az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(ax^2 + bx + c)$, függvényt, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5p a) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ határértéket, ha $a = 1$, $b = c = 0$.

5p b) Ellenőrizd, hogy $f'(0) - f(0) = b$.

5p c) Határozd meg az $a, b, c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ és $f''(0) = 4$.

2. Tekintsük az $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 1} dx$ integrálokat, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

5p a) Számítsd ki I_1 .

5p b) Esetleg felhasználva, hogy $0 \leq x^2 \leq x$ bármely $x \in [0, 1]$ esetén, bizonyítsd be, hogy $I_2 \leq I_1$.

5p c) Bizonyítsd be, hogy $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1} + 2\ln 2$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.