

III. FELADAT (30p) V: 010

1. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \geq 1 \\ -x^2 + x, & x < 1 \end{cases}$ függvényt.

5p a) Tanulmányozd az f függvény folytonosságát az $x_0 = 1$ pontban.

5p b) Számítsd ki: $f'(0) + f'(2)$.

5p c) Tanulmányozd az f deriválhatóságát az $x_0 = 1$ pontban.

2. Tekintsük az $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = e^x$ és $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$ függvényeket, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

5p a) Számítsd ki a $f_1(x)$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.

5p b) Számítsd ki az $\int_0^1 x f_0(x) dx$ értékét.

5p c) Bizonyítsd be, hogy $f_2(x) \geq 0$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.