

III. FELADAT (30p) V: 011

1. Tekintsük az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$ függvényt.

5p a) Számítsd ki az $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

5p b) Bizonyítsd be, hogy az f függvény csökkenő a $(0, +\infty)$ intervallumon.

5p c) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 f'(x)$ határértéket.

2. Tekintsük az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x$ függvényt.

5p a) Számítsd ki az $\int_1^e (f(x) - \frac{\ln x}{x}) dx$ értékét.

5p b) Igazold, hogy $\int_1^e f(x) dx = \frac{e^2}{2}$

5p c) Határozd meg az $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - x) dx$, $n \geq 1$ általános tagú számtani haladvány állandó különbségét.