

**III. FELADAT (30p) V: 012**

1. Tekintsük az  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 2 \ln x$  függvényt.

5p a) Számítsd ki az  $f'(x)$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

5p b) Igazold, hogy az  $f$  függvény konvex a  $(0, +\infty)$  intervallumon.

5p c) Bizonyítsd be, hogy  $f(x) \geq \ln \frac{e^2}{4}$ ,  $\forall x \in (0, +\infty)$ .

2. Tekintsük az  $f_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_m(x) = m^2 x^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$  függvényeket, ahol  $m \in \mathbb{R}$ .

5p a) Számítsd ki  $\int_0^1 f_1(x) dx$ .

5p b) Számítsd ki az  $\int_0^1 e^x f_0(x) dx$  értékét.

5p c) Határozd meg az  $m \in \mathbb{R}^*$  paramétert úgy, hogy  $\int_0^1 f_m(x) dx = \frac{3}{2}$  legyen.