

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) V: 013

1. Tekintsük az $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ függvényt.

5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$, bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képéhez a $-\infty$ -be húzott aszimptota egyenletét.

5p c) Bizonyítsd be, hogy $f(x) \geq 1$ bármely $x > -1$ esetén.

2. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén tekintsük az $I_n = \int_e^{e^2} \frac{\ln^n x}{x} dx$ integrállakat.

5p a) Igazold, hogy $I_0 = 1$.

5p b) Határozd meg: I_1 .

5p c) Esetleg felhasználva, hogy $1 \leq \ln x \leq 2$, $\forall x \in [e, e^2]$, bizonyítsd be, hogy

$$1 \leq \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \leq 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$