

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) V: 014

1. Tekintsük az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ függvényt.

5p a) Számítsd ki $f'(e)$.

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képéhez a $+\infty$ -be húzott vízszintes aszimptota egyenletét.

5p c) Bizonyítsd be, hogy $x^e \leq e^x$, bármely $x > 0$ esetén.

2. Tekintsük az $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ függvényt.

5p a) Számítsd ki az $\int_0^4 f^2(x) dx$ értékét.

5p b) Ellenőrizd, hogy az $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{f(x)} dx = 0$.

5p c) Esetleg felhasználva a $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ egyenlőtlenséget, amikor $a, b \in (0, +\infty)$, bizonyítsd be, hogy

$$0 \leq \int_0^m f(x) dx \leq 8, \text{ bármely } m \in [0, 2].$$