

III. FELADAT (30p) V: 015

1. Tekintsük az $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket, ahol

$$f_0(x) = e^{-x} - 1 \quad \text{és} \quad f_{n+1}(x) = f_n'(x), \text{ bármely } n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

5p a) Számítsd ki az $f_1(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Határozd meg az f_0 függvény grafikus képéhez a $+\infty$ -be húzott vízszintes aszimptota egyenletét.

5p c) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x) + x - 1}{x^2}$ határértéket.

2. Tekintsük az $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \sqrt{x^2 + 1}$ függvényt.

5p a) Igazold, hogy az $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = e - 1$.

5p b) Számítsd ki a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = xe^{-x} f(x)$ függvény grafikonja, az Ox tengely, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenesek által határolt síkidom területét.

5p c) Határozd meg az Ox tengely körül megforgatott f függvény grafikonja által meghatározott forgástest térfogatát.