

**III. FELADAT (30p) V: 018**

1. Tekintsük az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x+1)^2 + (x-1)^2$  függvényt.

5p a) Ellenőrizd, hogy  $f'(x) = 4x$ , bármely  $x \in \mathbb{R}$  esetén.

5p b) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$  határértéket.

5p c) Bizonyítsd be, hogy  $f'(x) \leq e^{4x} - 1$ , bármely  $x \in \mathbb{R}$  esetén.

2. Tekintsük az  $I_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényeket, ahol

$$I_0(x) = e^x \text{ és } I_{n+1}(x) = \int_0^x I_n(t) dt, \text{ bármely } n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

5p a) Számítsd ki:  $I_1(1)$ .

5p b) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{I_2(x)}{x+1}$  határértéket.

5p c) Bizonyítsd be, hogy az  $I_2(x) \geq 0$ , bármely  $x \in \mathbb{R}$  esetén.