

III. FELADAT (30p) V: 020

1. Tekintsük az $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$ függvényt.

5p a) Számítsd ki az $f'(x)$, $x \in [0,1]$.

5p b) Igazold, hogy $f(0) + f'(0) = \frac{3}{4}$.

5p c) Bizonyítsd be, hogy $\frac{3}{e} \leq \frac{1}{f(x)} \leq 2, \forall x \in [0,1]$.

2. Tekintsük az $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$ és $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ függvényeket.

5p a) Igazold, hogy $F(x) = -f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

5p b) Bizonyítsd be, hogy a $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = F(x) - f(x)$ függvény konkáv \mathbb{R} -en.

5p c) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t f(t^2) dt$ határértéket.