

III. FELADAT (30p) V: 023

1. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$ függvényt.

5p a) Számítsd ki az $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Határozd meg az f függvény szélsőértékpontjainak a számát.

5p c) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - 1 \right)$ határértéket.

2. Tekintsük az $f, F: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ és $F(x) = (x+1)\ln x - x + 1$ függvényeket.

5p a) Igazold, hogy F függvény egy primitív függvénye az f függvénynek, amely az $x=1$ -ben lesz zéró.

5p b) Számítsd ki az $\int_1^2 f(e^x) dx$ értéket.

5p c) Igazold, hogy a $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt = f(1)$.