

III. FELADAT (30p) V: 029

1. Tekintsük az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln x$ függvényt.

5p a) Mutasd ki, hogy $f(1) - f'(1) = 1$.

5p b) Határozd meg az f függvény szélsőértékpontjait.

5p c) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ határértéket.

2. Tekintsük az $I = \int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx$ és $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{x+1} dx$ integrálokat.

5p a) Ellenőrizd, hogy $I + J = e - 1$.

5p b) Felhasználva az $e^x \geq x + 1$ egyenlőtlenséget, mely igaz bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, mutasd ki, hogy $J \geq \frac{1}{2}$.

5p c) Esetleg felhasználva a parciális integrálás módszerét, bizonyítsd be, hogy

$$I = \frac{e-2}{2} + \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2} dx.$$