

III. FELADAT (30p) V: 030

1. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x$ függvényt.

5p a) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ határértéket.

5p b) Igazold, hogy az f függvény konvex az \mathbb{R} -en.

5p c) Oldd meg \mathbb{R} -en az $f'(x) - f''(x) + f(x) = e^x - 3$ egyenletet.

2. Bármely n természetes szám esetén tekintsük az $I_n = \int_0^1 x(1+x)^n dx$ integrálokat.

5p a) Számítsd ki: I_1 .

5p b) Felhasználva azt, hogy $(1+x)^n \leq (1+x)^{n+1}$, bármely $n \in \mathbb{N}$ és $x \in [0,1]$ esetén, igazold, hogy $I_{2008} \geq I_{2007}$.

5p c) Felhasználva esetleg az $x(1+x)^n = (1+x)^{n+1} - (1+x)^n$ azonosságot, mely igaz bármely $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén, mutasd ki, hogy $I_n = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}$.