

**III. FELADAT (30p) V: 031**

1. Tekintsük az  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 \ln x$  függvényt.

5p a) Mutasd ki, hogy  $f'(x) = x(2 \ln x + 1)$ , bármely  $x \in (0, +\infty)$ .

5p b) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x \ln x}$  határértéket.

5p c) Bizonyítsd be, hogy  $f(x) \geq -\frac{1}{2e}$ , bármely  $x > 0$  esetén.

2. Tekintsük az  $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 + \ln x$  és  $g(x) = x \ln x$  függvényeket.

5p a) Igazold, hogy a  $g$  függvény az  $f$  függvénynek egy primitív függvénye.

5p b) Számítsd ki az  $\int_1^e f(x) \cdot g(x) dx$  értékét.

5p c) Határozd meg a  $g$  függvény grafikonja, az  $Ox$  tengely, valamint az  $x=1$  és  $x=e$  egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét.