

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) V: 033

1. Tekintsük az $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{2e^x}{x + e^x}$ függvényt.

5p a) Ellenőrizd, hogy $f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(x+e^x)^2}$, bármely $x \in [0, +\infty)$ esetén.

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képéhez a $+\infty$ -be húzott vízszintes aszimptota egyenletét.

5p c) Igazold, hogy $-1 \leq f(x) \leq \frac{1-e}{1+e}$, bármely $x \geq 0$.

2. Bármely nem nulla n természetes szám esetén tekintsük az $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$ integrálokat.

5p a) Számítsd ki: I_1 .

5p b) Igazold, hogy $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Felhasználva esetleg az $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{x+1} \leq x^n$ egyenlőtlenséget, mely igaz bármely $x \in [0, 1]$ és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, bizonyítsd be, hogy $\frac{1}{2} \leq 2009 \cdot I_{2008} \leq 1$.