

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Tekintsük az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ függvényt.

5p a) Ellenőrizd, hogy $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$, bármely $x > 0$ esetén.

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képéhez a $+\infty$ -be húzott aszimptota egyenletét.

5p c) Igazold, hogy $\sqrt{x} \cdot f'(x) \leq f(x)$, bármely $x \in (0, 2]$ esetén.

2. Tekintsük az $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 3x^2 + 2$ és $F(x) = e^x + x^3 + 2x - 1$ függvényeket.

5p a) Igazoljuk, hogy az F függvény az f függvénynek egy primitív függvénye.

5p b) Számítsd ki az $\int_0^1 f(x) \cdot F(x) dx$ értékét.

5p c) Igazold, hogy $\int_0^1 (xf(x) + F(x)) dx = F(1)$.