

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p) V: 037**

1. Tekintsük az  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x - \ln x}{x + \ln x}$  függvényt.

5p a) Ellenőrizd, hogy  $f(1) + f(e) = \frac{2e}{1+e}$ .

5p b) Igazold, hogy  $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{(x + \ln x)^2}$ , bármely  $x \in [1, +\infty)$ .

5p c) Határozd meg a  $g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{f'(x)}{(f(x) + 1)^2}$  függvény grafikus képéhez a  $+\infty$ -be húzott aszimptota egyenletét.

2. Tekintsük az  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$  és  $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$  függvényeket.

5p a) Igazold, hogy  $\int_0^1 f'(x) dx = \ln 2$ .

5p b) Bizonyítsd be, hogy  $\int g(x) dx = f(x) + C$ .

5p c) Számítsd ki az  $\int_1^2 \frac{g(x)}{f^2(x)} dx$  értékét.