III. FELADAT (30p) V: 038

1. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ függvényt.

5p **a)** Számítsd ki: $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait.

5p **c)** Ha a $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ függvényt a $g(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ képlettel értelmezünk, határozd meg a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)+g\left(x^2\right)+g\left(x^3\right)+\ldots+g\left(x^{2008}\right)+x^{2010}}{x^{2009}}$ határértéket.

2. Bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén tekintsük az $I_n=\int\limits_e^{e^2} x\ln^n x\,dx$ integrálokat.

5p **a)** Számítsd ki: I_0.

5p **b)** Igazold, hogy $I_n\le I_{n+1}$, bármilyen $n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Parciális integrálás módszerét használva, bizonyítsd be, hogy bármely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén fennáll az $I_n=\dfrac{e^2\left(e^2\cdot 2^n-1\right)}{2}-\dfrac{n}{2}I_{n-1}$ összefüggés.