

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) V: 041

1. Legyen az $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ függvény.

5p a) Számítsd ki a $f'(x)$, $x \in (1, \infty)$.

5p b) Igazold, hogy az $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -1$.

5p c) Igazold, hogy az f függvény csökkenő az $(1, +\infty)$ intervallumon.

2. Tekintsük az $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{x}$ és $g(x) = \frac{1}{4} \cdot \ln x$ függvényeket.

5p a) Igazold, hogy $\int_1^4 f(x) dx = \ln 4 + 2$.

5p b) Parciális integrálás módszerét használva, bizonyítsd be, hogy $\int_1^4 g(x) dx = \ln 4 - \frac{3}{4}$.

5p c) Igazold, hogy létezik egy $x_0 \in (1, 4)$ pont, amelyre $g(x_0) < f(x_0)$.