III. FELADAT (30p) V: 042

1. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2008}+2008^x$ függvényt, ahol $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Határozd meg $f'(x)$, ahol $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Igazold, hogy az f függvény konvex az $\mathbb{R}$-en.

5p **c)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$ határértéket.

2. Tekintsük az $f, g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x^2+1)}$ és $g(x)=\frac{1}{x}$ függvényeket.

5p **a)** Ellenőrizd, hogy az $\int_1^e g(x)\,dx=1$.

5p **b)** Felhasználva az $f(x)=g(x)-\frac{x}{x^2+1}$ azonosságot bármely $x>0$ esetén, számítsd ki az $\int_1^e f(x)\,dx$ értékét.

5p **c)** Felhasználva az $f(x)\le\frac{1}{2x^2}$ egyenlőtlenséget, mely igaz bármely $x\in[1,e]$ esetén, igazold, hogy $\ln\frac{e^2+1}{2}\ge\frac{e+1}{e}$.