

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p) V: 042**

1. Tekintsük az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{2008} + 2008^x$  függvényt, ahol  $x \in \mathbb{R}$ .

5p a) Határozd meg  $f'(x)$ , ahol  $x \in \mathbb{R}$ .

5p b) Igazold, hogy az  $f$  függvény konvex az  $\mathbb{R}$ -en.

5p c) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x}$  határértéket.

2. Tekintsük az  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x(x^2 + 1)}$  és  $g(x) = \frac{1}{x}$  függvényeket.

5p a) Ellenőrizd, hogy az  $\int_1^e g(x) dx = 1$ .

5p b) Felhasználva az  $f(x) = g(x) - \frac{x}{x^2 + 1}$  azonosságot bármely  $x > 0$  esetén, számítsd ki az  $\int_1^e f(x) dx$  értékét.

5p c) Felhasználva az  $f(x) \leq \frac{1}{2x^2}$  egyenlőtlenséget, mely igaz bármely  $x \in [1, e]$  esetén, igazold, hogy  $\ln \frac{e^2 + 1}{2} \geq \frac{e + 1}{e}$ .