

**III. FELADAT (30p) V: 043**

1. Tekintsük az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$  függvényt.

5p a) Határozd meg az  $f$  függvény grafikus képéhez a  $-\infty$ -be húzott aszimptota egyenletét.

5p b) Igazold, hogy  $f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$ , bármely  $x \in \mathbb{R}$  esetén.

5p c) Bizonyítsd be, hogy bármely  $x \in \mathbb{R}$  esetén  $\frac{2}{3} \leq f(x) + f(x^2) \leq 4$ .

2. Tekintsük az  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \frac{1}{x}$  függvényt.

5p a) Határozd meg az  $\int_1^e f(x) dx$  értékét.

5p b) Igazold, hogy az  $f$  függvény bármelyik primitív függvénye konvex a  $(0, +\infty)$  intervallumon.

5p c) Bizonyítsd be, hogy az  $Ox$  tengely körül megforgatott  $g, h: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x)$  és  $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$  függvények által meghatározott forgástestek térfogatai egyenlők.