

III. FELADAT (30p) V: 044

1 Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x$ függvényt.

5p a) Ellenőrizd, hogy $f'(0) = 1$.

5p b) Igazold, hogy az f függvény konvex az \mathbb{R} -en.

5p c) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{e^x}$ határértéket.

2. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$ függvényt.

5p a) Ellenőrizd, hogy $\int_0^1 f(x) dx = e - \frac{3}{2}$.

5p b) Számítsd ki az $\int_0^1 x \cdot f(x) dx$ értékét.

5p c) Igazold, hogy ha $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ az f függvénynek egy primitív függvénye, akkor

$$\int_e^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx = F(2) - F(1).$$