

III. FELADAT (30p) V: 045

1. Tekintsük az $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)e^x$ és $g(x) = xe^x$ függvényeket.

5p a) Ellenőrizd, hogy $f'(x) = g(x)$, bármely $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Határozd meg a g függvény grafikus képehez a $-\infty$ -be húzott aszimptota egyenletét.

5p c) Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ egy intervallum, akkor igazold, hogy a g függvény növekvő az I -n akkor és csak akkor, ha az f függvény konvex az I -n.

2. Tekintsük az $f, g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ és $g(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ függvényeket.

5p a) Igazold, hogy f egy primitív függvénye az g függvénynek.

5p b) Számítsd ki az $\int_1^e f(x) \cdot g(x) dx$ értékét.

5p c) Oldd meg az $\int_1^a f(x) dx = 2$ egyenletet az $[1, +\infty)$ intervallumon.