III. FELADAT (30p) V: 046

1. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ függvényt.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ bármely $x\neq 1$ esetén.

5p **b)** Határozd meg az f függvény szélsőértékpontjait.

5p **c)** Bizonyítsd be, hogy bármely $a<1$ és $b>1$ esetén, fennáll az $f(a)-f(b)\leq -8$ egyenlőtlenség.

2. Tekintsük az $f:\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{2x-1}$ függvényt.

5p **a)** Számítsd ki: $\int f^2(x)\,dx$.

5p **b)** Számítsd ki az $\int_1^5\sqrt{2x-1}\,dx$ értékét.

5p **c)** Tudva, hogy az $F:\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{2x-1}{3}\sqrt{2x-1}$ egy primitív függvénye az f -nek, igazold, hogy $\int_1^5 f(x)\cdot F^{2008}(x)\,dx=\dfrac{3^{6027}-1}{2009\cdot 3^{2009}}$.