

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) V: 047

1. Tekintsük az $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2 \ln x$ függvényt.

5p a) Számítsd ki: $f'(x)$, $x \in (1, \infty)$.

5p b) Igazold, hogy az f függvény csökkenő az $[1, 2]$ intervallumon.

5p c) Felhasználva, hogy $1 \leq x \leq x^2 \leq 2$ bármilyen $x \in [1, \sqrt{2}]$ esetén, bizonyítsd be az $x^2 - x \leq 2 \ln x$ egyenlőtlenséget, bármely $x \in [1, \sqrt{2}]$ esetén.

2. Minden $n \in \mathbb{N}$ -re tekintsük az $I_n = \int_2^3 \frac{x^n}{x^2 - 1} dx$ integrálokat.

5p a) Igazold, hogy $I_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

5p b) Számítsd ki: I_1 .

5p c) Bizonyítsd be, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ -re, $I_{n+2} - I_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$.