

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) V: 048

1. Tekintsük az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ függvényt.

5p a) Igazold, hogy az $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, $\forall x > 0$.

5p b) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}$, bármely $x > 0$.

5p c) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) \right)$ határértéket.

2. Tekintsük az $I_n = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^n(x^2+1)} dx$ integrálokat, ahol $n \in \mathbb{N}$.

5p a) Ellenőrizd, hogy $I_0 + I_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

5p b) Felhasználva az $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$ azonosságot, mely igaz bármilyen $x \neq 0$ esetén, határozd meg I_1 -et.

5p c) Igazold, hogy $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{(\sqrt{3})^{n-1}} \right)$, bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.