

**III. FELADAT (30p) V: 049**

1. Tekintsük az  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-2)\ln x$  függvényt.

5p a) Számítsd ki:  $f'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .

5p b) Határozd meg a  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  határértéket.

5p c) Igazold, hogy az  $f'$  függvény növekvő a  $(0, +\infty)$  intervallumon.

2. Tekintsük az  $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$  és  $g(x) = \frac{\sqrt{x} + 2}{2x}$  függvényeket.

5p a) Igazold, hogy az  $f$  függvény egy primitív függvénye a  $g$  függvénynek.

5p b) Számítsd ki az  $\int_1^4 f(x) \cdot g(x) dx$  értékét.

5p c) Bizonyítsd be, hogy  $\int_1^4 g(x) \cdot f''(x) dx = -1$ , ahol  $f''$  az  $f$  függvénynek a másodrendű deriváltja.