

III. FELADAT (30p) V: 050

1. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$ függvényt.

5p a) Tanulmányozd az f függvény folytonosságát az $x_0 = 0$ pontban.

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képéhez a $-\infty$ -be húzott aszimptota egyenletét.

5p c) Igazold, hogy az f függvény konkáv a $(0, +\infty)$ intervallumon.

2. Tekintsük az $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$ és $g(x) = x$ függvényeket.

5p a) Ellenőrizd, hogy $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = e - 1$.

5p b) Számítsd ki az $\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$ értékét.

5p c) Bizonyítsd be, hogy $\int_0^1 f(x^n) \cdot g^{2n-1}(x) dx = \frac{e-1}{2n}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$.