III. FELADAT (30p) V: 054

1. Tekintsük az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$ függvényt.

5p **a)** Számítsd ki: $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

5p **b)** Igazold, hogy az f függvény konvex a $(0,\infty)$ intervallumon.

5p **c)** Számítsd ki a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ határértéket.

2. Tekintsük az $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=m^2x^2+mx+1$ függvényt, ahol $m\in\mathbb{R}^*$.

5p **a)** Igazold, hogy bármilyen $m\in\mathbb{R}^*$ esetén az f_m függvény primitív függvényei növekvő függvények.

5p **b)** Számítsd ki az $\int_0^1\left(f_1(x)-x^2-1\right)e^x\,dx$ értékét.

5p **c)** Határozd meg az $m\in\mathbb{R}^*$ azon értékét, amelyre az f_m függvény grafikonja, az Ox tengely, valamint az $x=0$, $x=1$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom a legkisebb területű lesz.