

III. FELADAT (30p) V: 056

1. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$ függvényt.

5p a) Számítsd ki a $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f''(x)}$ határértéket.

5p c) Felhasználva, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $e^x \geq x + 1$, bizonyítsd be, hogy

$$\frac{e^{n+1} - e}{e - 1} \geq \frac{n \cdot (n + 3)}{2}, \text{ bármilyen } n \in \mathbb{N}^* \text{ esetén.}$$

2. Tekintsük az $f, g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$, $g(x) = f''(x)$ függvényeket.

5p a) Számítsd ki az $\int_0^2 (x+1)f(x) dx$ értékét.

5p b) Számítsd ki az $\int_0^1 g(x) dx$ értékét

5p c) Határozd meg a g függvény azon primitív függvényét, melynek az $y = 2x$ egyenletű egyenes lesz az aszimptotája a $+\infty$ -be.