

III. FELADAT (30p) V: 066

1. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x+2}, & x \geq 0 \\ x + \frac{3}{2}, & x < 0 \end{cases}$ függvényt.

5p a) Tanulmányozd az f függvény folytonosságát az $x_0 = 0$ pontban.

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képéhez a $+\infty$ -be húzott vízszintes aszimptota egyenletét.

5p c) Igazold, hogy $f(x) \in \left[\frac{3}{2}, 2\right)$, bármely $x \in [0, \infty)$.

2.

5p a) Számítsd ki az $\int_1^2 \frac{1}{x^2 + 2x} dx$ értékét.

5p b) Bizonyítsd be, hogy $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \leq 1$.

5p c) Tekintsük az $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényt és az a , b és c szigorúan pozitív valós számokat. Igazold, hogy ha az $\int_1^a f(x) dx$, $\int_1^b f(x) dx$, $\int_1^c f(x) dx$ számok egy számtani haladvány egymás után következő tagjai, akkor az a , b , c számok egy mértani haladvány egymás után következő tagjai.