III. FELADAT (30p) V: 071

1. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén tekintsük az $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ függvényeket, ahol $f_0(x) = \ln x$ és $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$.

5p **a)** Határozd meg az f_1 függvényt.

5p **b)** Határozd meg az f_2 függvény grafikus képéhez a $+\infty$-be húzott aszimptota egyenletét.

5p **c)** Igazold, hogy az $f_0(x) \le \dfrac{1}{f_1(x)} - 1$, bármely $x \in (0,+\infty)$.

2. Tekintsük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ függvényt.

5p **a)** Számítsd ki az $\int_0^{\sqrt{e-1}} f(x)\,dx$ értékét.

5p **b)** Bizonyítsd be, hogy az f függvény bármely primitív függvénye növekvő a $(0,+\infty)$ intervallumon.

5p **c)** Bizonyítsd be, hogy $\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx > \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx$.