

III. FELADAT (30p) V: 073

1. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3}{x^2+1}, & x \leq 1 \\ \frac{2x+a}{x^2+2}, & x > 1 \end{cases}$ függvényt, ahol $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Határozd meg az a valós számot úgy, hogy az f függvény folytonos legyen az $x_0 = 1$ pontban.

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képéhez a $-\infty$ -be húzott vízszintes aszimptota egyenletét.

5p c) Határozd meg az a valós számot úgy, hogy a grafikus képhez az $x_0 = 2$ pontban húzott érintő iránytényezője 1 legyen.

2. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$ függvényt.

5p a) Ellenőrizd, hogy az $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = e - 1$.

5p b) Számítsd ki az $\int_0^1 x f(x) dx$ értékét.

5p c) Bizonyítsd be, hogy $1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq e$.