

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) V: 074

1. Tekintsük az $f, g: \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2)$ és $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ függvényeket.

5p a) Igazold, hogy $h(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$.

5p b) Oldd meg a $h'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-1}$ egyenletet, ahol $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

5p c) Bizonyítsd be, hogy $\frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{h'(x)}{h(x)} + \frac{f'(x)}{f(x)}$, bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{1, \frac{3}{2}, 2\right\}$.

2. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2007} + x + 1$ függvényt.

5p a) Határozd meg az Ox tengely körül megforgatott $h: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - x^{2007} - 1$ függvény grafikonja által meghatározott forgástest térfogatát.

5p b) Határozd meg az f függvény azon $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ primitív függvényét, amelyre $F(0) = 1$.

5p c) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^{2008}}$ határértéket.